Partielle Differentialgleichungen

Separationslösung

Separationsansatz

Inhalt

Übersicht:

- Separationslösung
- Eindeutigkeit von Lösungen
  - Green‘scher Satz
  - Dirichlet Problem zur Poisson Gleichung

FH AACHEN UNIVERSITY OF APPLIED SCIENCES

Partielle Differentialgleichungen

Separationsansatz

Lösung durch Separationsansatz

Wir wollen eine Lösung zum 1D Wärmeleitungsgleichungsproblem auf dem Intervall $[0, L]$ bestimmen…

$$\partial_t u(x,t) = \partial_x^2 u(x,t) \qquad x \in [0,L], t \geq 0$$

$$u(x, t=0) = f(x) \qquad x \in [0,L]$$

$$u(x=0,t) = u(x=L,t) = 0 \qquad t \geq 0$$

Probleme dieser Art können mit dem Separationsansatz nach Fourier gelöst werden…

$$\Rightarrow \quad u(x,t) = v(x) \cdot w(t)$$

Partielle Differentialgleichungen

Separationsansatz

Jetzt sind sie an der Reihe…

Setzen Sie den Ansatz in die Differentialgleichung ein und berechnen Sie mit Hilfe der Produktregel die Ableitungen…

$$u(x,t) = v(x) \cdot w(t) \quad \Rightarrow \quad \partial_t u(x,t) = \partial_x^2 u(x,t)$$

Partielle Differentialgleichungen

Separationsansatz

Jetzt sind sie an der Reihe…

Setzen Sie den Ansatz in die Differentialgleichung ein und berechnen Sie mit Hilfe der Produktregel die Ableitungen…

$$u(x,t) = v(x) \cdot w(t) \quad \Rightarrow \quad \partial_t u(x,t) = \partial_x^2 u(x,t)$$

Wir erhalten…

$$\partial_t u(x,t) = \partial_x^2 u(x,t)$$

$$\downarrow$$

$$\partial_t\big(v(x) \cdot w(t)\big) = \partial_x^2\big(v(x) \cdot w(t)\big)$$

$$\downarrow$$

$$v(x) \cdot \dot{w}(t) = v''(x) \cdot w(t)$$

Separationsansatz

Wir formen die Gleichung um, sodass Ort- und Zeitvariablen getrennt werden…

$$v(x) \cdot \dot{w}(t) = v''(x) \cdot w(t) \quad \Rightarrow \quad \frac{\dot{w}(t)}{w(t)} = \frac{v''(x)}{v(x)}$$

Gilt für alle $x \in [0, L]$

Gilt für alle $t \geq 0$

Die Gleichung gilt für alle x und t, was nur möglich ist, wenn die Seiten konstant sind…

Separationsansatz

Separationsansatz

Beide Seiten sind konstant…

$$\frac{\dot{w}(t)}{w(t)} = \frac{v''(x)}{v(x)} = -\lambda$$

$$\dot{w}(t) = -\lambda \cdot w(t)$$

$$v''(x) + \lambda \cdot v(x) = 0$$

Die Temperatur klingt bei diesem Problem ab

Wir lösen die Gleichung für die Zeitabhängigkeit…

$$\dot{w}(t) = -\lambda \cdot w(t) \quad \Rightarrow \quad w(t) = C_1 \cdot e^{-\lambda t}$$

Wir lösen die Gleichung für die Ortsabhängigkeit…

$$v''(x) + \lambda \cdot v(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad v(x) = C_2 \sin\left(\sqrt{\lambda} \cdot x\right) + C_3 \cos\left(\sqrt{\lambda} \cdot x\right)$$

Separationsansatz

Separationsansatz

Wir müssen nun die Konstanten so bestimmen, dass die Rand- und Anfangswerte erfüllt werden…

$$w(t) = C_1 \cdot e^{-\lambda t} \qquad v(x) = C_2 \sin\left(\sqrt{\lambda} \cdot x\right) + C_3 \cos\left(\sqrt{\lambda} \cdot x\right)$$

Randbedingung… $u(x = 0, t) = u(x = L, t) = 0$

$$x = 0 \Rightarrow v(0) = C_2 \sin\left(\sqrt{\lambda} \cdot 0\right) + C_3 \cos\left(\sqrt{\lambda} \cdot 0\right)$$

$$\Rightarrow v(0) = C_3 = 0$$

$$x = L \Rightarrow v(L) = C_2 \sin\left(\sqrt{\lambda} \cdot L\right) = 0$$

$$\sqrt{\lambda} \cdot L = n \cdot \pi \Rightarrow \lambda_n = \frac{\pi^2 n^2}{L^2}$$

Separationsansatz

Separationsansatz

Wir fassen unsere bisherigen Ergebnisse zusammen und betrachten dann die Anfangsbedingung…

$$u_n(x,t) = C_n \cdot \sin\left(\frac{n \cdot \pi}{L} \cdot x\right) \cdot e^{-\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 t} \qquad n \in \mathbb{N}$$

Dieser Lösungsansatz muss die Anfangsbedingung erfüllen…

$$u(x, t=0) = f(x) \quad \Rightarrow \quad u_n(x, t=0) = C_n \cdot \sin\left(\frac{n \cdot \pi}{L} \cdot x\right) \cdot e^{-\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 \cdot 0}$$

Soll $= f(x)$ sein…

Wir können die Anfangsbedingung nicht erfüllen, indem wir einfach die Konstante anpassen…



Separationsansatz

Separationsansatz

Wir haben mehrere (unendlich viele) Lösungen zur Verfügung und können durch Summieren die Anfangsbedingung erfüllen…

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cdot \sin\left(\frac{n \cdot \pi}{L} \cdot x\right) \cdot e^{-\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 t}$$

$t = 0$ ⇒ $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cdot \sin\left(\frac{n \cdot \pi}{L} \cdot x\right)$

Wir wählen die Konstanten C_n sodass die Anfangsbedingung erfüllt ist…

Ist das möglich?

⇒ Fourier Reihe



Partielle Differentialgleichungen

Separationsansatz

Existenz eine Lösung

Wir können mit unseren bisherigen Ergebnissen die Existenz einer Lösung zu unserem Problem beweisen…

Die Funktion

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cdot \sin\left(\frac{n \cdot \pi}{L} \cdot x\right) \cdot e^{-\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 t}$$

löst unser Problem, wenn wir die Anfangstemperatur $f(x)$ in eine Fourier Reihe entwickeln können.

- Fourier Reihenentwicklung sind möglich für eine sehr weite Klasse von Funktionen (Sprungstellen, Unstetigkeit ist möglich)
- Auch bei nicht glatten Anfangstemperaturen ist die Lösung durch den Sinus und die e-Funktion sehr glatt…

Partielle Differentialgleichungen

Separationsansatz

Näherungslösung für große Zeiten (Maschbau)

Das Zeitverhalten der Lösung wird durch die Exponentialfunktion bestimmt.

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cdot \sin\left(\frac{n \cdot \pi}{L} \cdot x\right) \cdot e^{-\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 t}$$

Der Faktor $^{n\pi}/_{L}$ wächst mit n, d.h. die zugehörigen Lösungsanteile nehmen für große Zeiten schnell ab.

Daher dominiert der Lösungsanteil mit n=1 für große Zeiten.

Näherungslösung:

$$u(x,t) \approx C_1 \sin\left(\frac{\pi}{L} \cdot x\right) \cdot e^{-\left(\frac{\pi}{L}\right)^2 t}$$

Für große Zeiten verhält sich die Temperatur wie eine Exponentialfunktion, daher werden Temperaturprobleme in der Regelungstechnik als PT1 modelliert!

Partielle Differentialgleichungen

Eindeutigkeit von Lösungen

Green‘sche Formel

Die Green‘sche Formel folgt aus dem Gauß‘schen Integralsatz. Sie ist eine Art „partielle Integration“ für mehrere Dimensionen…

$$\oiint_{\partial G} \phi \underbrace{\frac{\partial \psi}{\partial \vec{n}}}_{= \nabla\psi \cdot \vec{n}} \, dA = \oiint_{\partial G} \phi \, \nabla\psi \cdot \underbrace{\vec{n} \, dA}_{= \overrightarrow{dA}}$$

$$= \oiint_{\partial G} (\phi \, \nabla\psi) \cdot \overrightarrow{dA} \qquad \text{(Gauß‘scher Satz)}$$

$$= \iiint_{G} \underbrace{\operatorname{div}(\phi \, \nabla\psi)}_{= \phi \, \Delta\psi + \nabla\phi \cdot \nabla\psi} \, dV \qquad = \iiint_{G} \phi \, \Delta\psi + \nabla\phi \cdot \nabla\psi \, \, dV$$

Partielle Differentialgleichungen

Eindeutigkeit von Lösungen

Green‘sche Formel

Die Green‘sche Formel lautet…

$$\oiint_{\partial G} \phi \frac{\partial \psi}{\partial \vec{n}} \, dA = \iiint_{G} \phi \, \Delta\psi + \nabla\phi \cdot \nabla\psi \, dV$$

Wieso „partielle Integration“?

Wir formen um…

$$\iiint_{G} \phi \, \Delta\psi \, dV = \oiint_{\partial G} \phi \frac{\partial \psi}{\partial \vec{n}} \, dA - \iiint_{G} \nabla\phi \cdot \nabla\psi \, dV$$

Und vergleichen mit 1D…

$$\int f(x) \cdot g'(x) dx = \underbrace{f(x) \cdot g(x)}_{\text{auf „Rand“}} - \int f'(x) \cdot g(x) dx$$

Ableitung „rübergeschoben“

Partielle Differentialgleichungen

Eindeutigkeit von Lösungen

Green‘sche Formel

Die Green‘sche Formel lautet…

$$\oiint_{\partial G} \phi \frac{\partial \psi}{\partial \vec{n}} \; dA = \iiint_{G} \phi \, \Delta\psi + \nabla\phi \cdot \nabla\psi \; dV$$

Bemerkung:

Unsere Herleitung ist nicht streng mathematisch. Hierzu müssten wir uns noch Gedanken an die nötigen Voraussetzungen für die Skalarfelder ϕ und ψ und das Gebiet G mit seinem Rand ∂G machen.

Wir gehen davon aus, dass bei unserer Anwendung diese Voraussetzungen immer erfüllt sind.

Eindeutigkeit zur Poisson Gleichung

Wir betrachten das Dirichlet-Problem zur Poisson Gleichung…

$$-\Delta u = f \quad \text{in } G \qquad u = g \quad \text{auf } \partial G$$

Satz (Eindeutigkeit):

Die Lösung zum Dirichlet Problem, falls sie existiert, ist eindeutig.

Partielle Differentialgleichungen

Eindeutigkeit von Lösungen

$$-\Delta u = f \quad \text{in } G$$
$$u = g \quad \text{auf } \partial G$$

Eindeutigkeit zur Poisson Gleichung

Beweis:

Wir nehmen an, dass es zwei Lösungen u_1 und u_2 gibt und zeigen, dass dann $u_1 = u_2$ gilt.

Wir betrachten die Differenz… $u(\vec{x}) = u_1(\vec{x}) - u_2(\vec{x})$

Wenn u_1 und u_2 das Dirichlet Problem lösen, erfüllen beide die PDG…

$$-\Delta u_1 = f$$
$$-\Delta u_2 = f$$

$$\Rightarrow \quad -\Delta u = -\Delta(u_1 - u_2) = \underbrace{-\Delta u_1}_{= f} + \underbrace{\Delta u_2}_{= -f} = f - f = 0$$

$$\Rightarrow \quad \Delta u = 0 \quad \text{(im Gebiet } G\text{)}$$

Eindeutigkeit von Lösungen

$$-\Delta u = f \quad \text{in } G$$
$$u = g \quad \text{auf } \partial G$$

Eindeutigkeit zur Poisson Gleichung

Beweis:

Wir nehmen an, dass es zwei Lösungen u_1 und u_2 gibt und zeigen, dass dann $u_1 = u_2$ gilt.

Wir betrachten die Differenz… $u(\vec{x}) = u_1(\vec{x}) - u_2(\vec{x})$

Wenn u_1 und u_2 das Dirichlet Problem lösen, erfüllen beide die Randbedingung…

$$u_1 = g$$
$$u_2 = g$$

$$\Rightarrow \quad u = u_1 - u_2 = g - g = 0$$

$$\Rightarrow \quad u = 0 \quad \text{(auf dem Rand } \partial G)$$

Partielle Differentialgleichungen

Eindeutigkeit von Lösungen

$$-\Delta u = f \quad \text{in } G$$
$$u = g \quad \text{auf } \partial G$$

Eindeutigkeit zur Poisson Gleichung

Beweis:

Wir nehmen an, dass es zwei Lösungen u_1 und u_2 gibt und zeigen, dass dann $u_1 = u_2$ gilt.

Wir betrachten die Differenz… $u(\vec{x}) = u_1(\vec{x}) - u_2(\vec{x})$

Wir fassen zusammen… $\Delta u = 0$ (im Gebiet G)

$u = 0$ (auf dem Rand ∂G)

Wir wenden die Green'sche Formel mit $\phi = u$ und $\psi = u$ an…

$$\oiint_{\partial G} \phi \frac{\partial \psi}{\partial \vec{n}} \, dA = \iiint_G \phi \, \Delta\psi + \nabla\phi \cdot \nabla\psi \, dV$$

$$\Rightarrow \quad \underbrace{\oiint_{\partial G} u \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} \, dA}_{=0} = \underbrace{\iiint_G u \, \Delta u + \nabla u \cdot \nabla u \, dV}_{=0}$$

Partielle Differentialgleichungen

Eindeutigkeit von Lösungen

$$-\Delta u = f \quad \text{in } G$$
$$u = g \quad \text{auf } \partial G$$

Eindeutigkeit zur Poisson Gleichung

Beweis:

Wir nehmen an, dass es zwei Lösungen u_1 und u_2 gibt und zeigen, dass dann $u_1 = u_2$ gilt.

Wir betrachten die Differenz… $u(\vec{x}) = u_1(\vec{x}) - u_2(\vec{x})$

Für die Differenz gilt…

$$\iiint_G \nabla u \cdot \nabla u \, dV = 0 \quad \Rightarrow \quad \iiint_G |\nabla u|^2 \, dV = 0$$

$$= \nabla u^2 = |\nabla u|^2 \qquad \geq 0$$

$$\Rightarrow \quad |\nabla u|^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \nabla u = 0 \quad \Rightarrow \quad u = \text{const}$$

Partielle Differentialgleichungen

Eindeutigkeit von Lösungen

$$-\Delta u = f \quad \text{in } G$$

$$u = g \quad \text{auf } \partial G$$

Eindeutigkeit zur Poisson Gleichung

Beweis:

Wir nehmen an, dass es zwei Lösungen u_1 und u_2 gibt und zeigen, dass dann $u_1 = u_2$ gilt.

Wir betrachten die Differenz… $u(\vec{x}) = u_1(\vec{x}) - u_2(\vec{x})$

Wir wissen, dass die Differenz eine Konstante ist… $u = \text{const}$

Es gilt aber nach wie vor, dass $u = 0$ auf dem Rand ∂G ist, daher muss $u = 0$ im kompletten Gebiet G sein.

$\Rightarrow$ $u = 0$ in G $\Rightarrow$ $0 = u = u_1 - u_2$ in G $\Rightarrow$ $u_1 = u_2$ in G

Partielle Differentialgleichungen

Eindeutigkeit von Lösungen

Jetzt sind Sie an der Reihe…

Wir betrachten das Neumann Problem zur Poisson Gleichung…

$$-\Delta u = f \quad \text{in } G \qquad\qquad \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} = g \quad \text{auf } \partial G$$

Aufgaben:

Wir betrachten die Differenz $u = u_1 - u_2$ von zwei Lösungen u_1 und u_2 zum Neumann Problem oben.

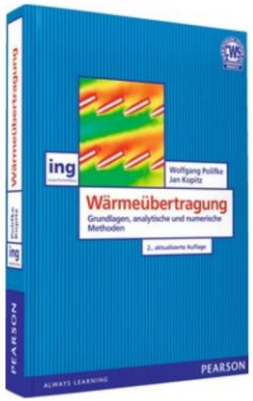
Welches Problem löst u?

Wenden Sie die Green‘sche Formel mit $\phi = u$ und $\psi = u$ an und zeigen Sie, dass die Lösung des Neumann Problems eindeutig ist, bis auf eine Konstante, d.h. dass gilt

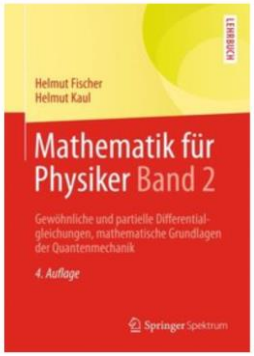
$$u = u_1 - u_2 = \text{const}$$

Partielle Differentialgleichungen

Literatur



Titel: Wärmeübertragung
Untertitel: Grundlagen, analytische und numerische Methoden
Autoren: W. Polifke und J. Kopitz
Verlag: Pearson Studium, 2. Auflage, 2009
Bib. Jülich: 61 WDW 28



Titel: Mathematik für Physiker – Band 2
Untertitel: Gew. und partielle DGLs, math. Grundlagen der Quantenmechanik
Autoren: H. Fischer und H. Kaul
Verlag: Springer Fachmedien, 4. Auflage, 2014
Bib. Jülich: Online-Ressource